Stoll, F. X. (1875): Neue Beiträge zum Problem des Apollonius, Zweiter Theil, In: Programm des Großherzoglichen Gymnasiums zu Bensheim für das Schuljahr 1874—1875, Darmstadt.

Neue Beiträge zum Problem des Apollonius.

(Schluss der vorjährigen Abhandlung.)

Es ist interessant, die Werthe der Summen auf beiden Seiten der Formeln 51 und 52 kennen zu lernen. Auf dem Wege, der dazu führt, kommt man zugleich zur Entwicklung der Schubert'schen Relationen. Wir formen zu diesem Zwecke vorerst die Ausdrücke für $\varDelta_1$ oder $\nu^2 - \lambda\mu$ (Gl. 35), λ oder $-V_1^{\,2}$ (Gl. 49), $\nu^2 + 2r_1\lambda$ (aus Gl. 27 und 28) und $4\varrho^2 D^2$ (aus Gl. 29) so um, dass darin statt der Grössen d die Mittelpunktsentfernungen c der gegebenen Kugeln vorkommen. Es ist nämlich:

$$\varDelta_1 = -\tfrac{1}{4}D^2 \begin{vmatrix} 0 & c_{12}^{\,2} - (r_1 - r_2)^2 & c_{13}^{\,2} - (r_1 - r_3)^2 & c_{14}^{\,2} - (r_1 - r_4)^2 \\ c_{12}^{\,2} - (r_1 - r_2)^2 & 0 & c_{23}^{\,2} - (r_2 - r_3)^2 & c_{24}^{\,2} - (r_1 - r_4)^2 \\ c_{13}^{\,2} - (r_1 - r_3)^2 & c_{23}^{\,2} - (r_2 - r_3)^2 & 0 & c_{34}^{\,2} - (r_3 - r_4)^2 \\ c_{14}^{\,2} - (r_1 - r_4)^2 & c_{24}^{\,2} - (r_2 - r_4)^2 & c_{34}^{\,2} - (r_3 - r_4)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch allmähliche Erhöhung der hier vorkommenden Determinante auf den 7ten Grad erhält man leicht:

$$\varDelta_1 = -\tfrac{1}{4}D^2 \begin{vmatrix} 1 & r_1^{\,2} & r_2^{\,2} & r_3^{\,2} & r_4^{\,2} \\ 1 & r_1^{\,2} & c_{12}^{\,2} - r_1^{\,2} + 2r_1r_2 & c_{13}^{\,2} - r_1^{\,2} + 2r_1r_3 & c_{14}^{\,2} - r_1^{\,2} + 2r_1r_4 \\ 1 & c_{12}^{\,2} + 2r_1r_2 - r_2^{\,2} & r_2^{\,2} & c_{23}^{\,2} - r_2^{\,2} + 2r_2r_3 & c_{24}^{\,2} - r_2^{\,2} + 2r_2r_4 \\ 1 & c_{13}^{\,2} + 2r_1r_3 - r_3^{\,2} & c_{23}^{\,2} - r_3^{\,2} + 2r_2r_3 & r_3^{\,2} & c_{34}^{\,2} - r_3^{\,2} + 2r_3r_4 \\ 1 & c_{14}^{\,2} + 2r_1r_4 - r_4^{\,2} & c_{24}^{\,2} - r_4^{\,2} + 2r_2r_4 & c_{34}^{\,2} - r_3^{\,2} + 2r_3r_4 & r_4^{\,4} \end{vmatrix} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}D^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & r_1^{\,2} & r_2^{\,2} & r_3^{\,2} & r_4^{\,2} \\ r_1^{\,2} & 1 & 2r_1^{\,2} & c_{12}^{\,2} + 2r_1r_2 & c_{13}^{\,2} + 2r_1r_3 & c_{14}^{\,2} + 2r_1r_4 \\ r_2^{\,2} & 1 & c_{12}^{\,2} + 2r_1r_2 & 2r_2^{\,2} & c_{23}^{\,2} + 2r_2r_3 & c_{24}^{\,2} + 2r_2r_4 \\ r_3^{\,2} & 1 & c_{13}^{\,2} + 2r_1r_3 & c_{23}^{\,2} + 2r_2r_3 & 2r_3^{\,2} & c_{34}^{\,2} + 2r_3r_4 \\ r_4^{\,2} & 1 & c_{14}^{\,2} + 2r_1r_4 & c_{24}^{\,2} + 2r_2r_4 & c_{34}^{\,2} + 2r_3r_4 & 2r_4^{\,2} \end{vmatrix} =$$

$$=-\tfrac{1}{4}D^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 2r_1 & r_1^2 & 1 & 0 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 \\ 2r_2 & r_2^2 & 1 & c_{12}^2 & 0 & c_{23}^2 & c_{24}^2 \\ 2r_3 & r_3^2 & 1 & c_{13}^2 & c_{23}^2 & 0 & c_{34}^2 \\ 2r_4 & r_4^2 & 1 & c_{14}^2 & c_{24}^2 & c_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} \text{ oder endlich}$$

$$53)\qquad \Delta_1=-\tfrac{1}{2}D^2\begin{vmatrix} -\tfrac{1}{2} & 0 & 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 0 & 0 & 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_1^2 & 1 & 0 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 \\ r_2 & r_2^2 & 1 & c_{12}^2 & 0 & c_{23}^2 & c_{24}^2 \\ r_3 & r_3^2 & 1 & c_{13}^2 & c_{23}^2 & 0 & c_{34}^2 \\ r_4 & r_4^2 & 1 & c_{14}^2 & c_{24}^2 & c_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Verfährt man ebenso mit:

$$V_1^2=\tfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c_{12}^2-(r_1-r_2)^2 & c_{13}^2-(r_1-r_3)^2 & c_{14}^2-(r_1-r_4)^2 \\ 1 & c_{12}^2-(r_1-r_2)^2 & 0 & c_{23}^2-(r_2-r_3)^2 & c_{24}^2-(r_2-r_4)^2 \\ 1 & c_{13}^2-(r_1-r_3)^2 & c_{23}^2-(r_2-r_3)^2 & 0 & c_{34}^2-(r_3-r_4)^2 \\ 1 & c_{14}^2-(r_1-r_4)^2 & c_{24}^2-(r_2-r_4)^2 & c_{34}^2-(r_3-r_4)^2 & 0 \end{vmatrix}, \text{ so wird:}$$

$$54)\qquad V_1^2=-\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} -\tfrac{1}{2} & 0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & 1 & 0 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 \\ r_2 & 1 & c_{12}^2 & 0 & c_{23}^2 & c_{24}^2 \\ r_3 & 1 & c_{13}^2 & c_{23}^2 & 0 & c_{34}^2 \\ r_4 & 1 & c_{14}^2 & c_{24}^2 & c_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Man erhält ferner aus 27 und 28, wenn man statt d_{12}, d_{13}, d_{14}, k, k', k'', l, m, n, die nöthigen Substitutionen vornimmt:

$$\nu+2r_1\lambda=-\begin{vmatrix} 2r_1 & c_{12}^2+r_1^2-r_2^2 & c_{13}^2+r_1^2-r_3^2 & c_{14}^2+r_1^2-r_4^2 \\ r_1-r_2 & c_{12}^2 & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2+c_{13}^2-c_{23}^2) & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2+c_{14}^2-c_{24}^2) \\ r_1-r_3 & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2+c_{13}^2-c_{23}^2) & c_{13}^2 & \tfrac{1}{2}(c_{13}^2+c_{14}^2-c_{34}^2) \\ r_1-r_4 & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2+c_{14}^2-c_{24}^2) & \tfrac{1}{2}(c_{13}^2+c_{14}^2-c_{34}^2) & c_{14}^2 \end{vmatrix},$$

und durch ähnliche Transformationen wie oben:

$$55)\qquad \nu + 2r_1\lambda = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & 1 & 0 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 \\ r_2 & 1 & c_{12}^2 & 0 & c_{23}^2 & c_{24}^2 \\ r_3 & 1 & c_{13}^2 & c_{23}^2 & 0 & c_{34}^2 \\ r_4 & 1 & c_{14}^2 & c_{24}^2 & c_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Endlich gibt Formel 29 nach Ausführung der Substitutionen zunächst:

$$4\varrho^2 D^2 = -\begin{vmatrix} 4r_1^2 & c_{12}^2 + r_1^2 - r_2^2 & c_{13}^2 + r_1^2 - r_3^2 & c_{14}^2 + r_1^2 - r_4^2 \\ c_{12}^2 + r_1^2 - r_2^2 & c_{12}^2 & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2 + c_{13}^2 - c_{23}^2) & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2 + c_{14}^2 - c_{24}^2) \\ c_{13}^2 + r_1^2 - r_3^2 & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2 + c_{13}^2 - c_{23}^2) & c_{13}^2 & \tfrac{1}{2}(c_{13}^2 + c_{14}^2 - c_{34}^2) \\ c_{14}^2 + r_1^2 - r_4^2 & \tfrac{1}{2}(c_{12}^2 + c_{14}^2 - c_{24}^2) & \tfrac{1}{2}(c_{13}^2 + c_{14}^2 - c_{34}^2) & c_{14}^2 \end{vmatrix}$$

und nach der Transformation:

$$56)\qquad 16\varrho^2 D^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1^2 & 1 & 0 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 \\ r_2^2 & 1 & c_{12}^2 & 0 & c_{23}^2 & c_{24}^2 \\ r_3^2 & 1 & c_{13}^2 & c_{23}^2 & 0 & c_{34}^2 \\ r_4^2 & 1 & c_{14}^2 & c_{24}^2 & c_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Formel für den Radius der Orthogonalkugel hat auch G. Bauer Münchener Ber. 1873. 343 gefunden. Vergl. Jahrb. f. d. Fortschr. d. Math. V. pag. 92.

Die den acht Paaren von Berührungskugeln angehörigen $\varDelta$, V und $\nu + 2r_1\lambda$ unterscheiden sich von einander nur durch die Vorzeichen der r (vergl. pag. 4 des vorjähr. Progr.). Addirt man daher $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, $\varDelta_4$, $\varDelta_5$ zusammen, nachdem man vorher nach Produkten der Elemente der ersten Horizontal- und Vertikalreihe zerlegt hat, so heben sich alle Glieder, welche Produkte verschiedener r enthalten, und übrig bleiben nur diejenigen Glieder, worin die Quadrate der r vorkommen, und ausserdem ein Glied, welches gleich ist D^2, multiplicirt mit einer Determinante, die nach 56 den Werth $16\varrho^2 D^2$ hat. Die Coefficienten von r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2 sind Minoren dieser Determinante und bedeuten je das 32fache Quadrat des Produktes aus der gegenüberliegenden Fläche des Mittelpunktstetraeders in den Orthogonalkreis der drei in den Ecken derselben mit den drei übrigen r beschriebenen Kreise. Ist z. B. f_1 die Tetraederfläche, welche der Kugel mit dem Radius r_1 gegenüberliegt und P_1 der Radius des genannten Orthogonalkreises, so lässt sich analog der Formel 56 beweisen und ist von G. Bauer a. a. O. bewiesen worden, dass:

$$57)\qquad -32\,P_1^{\,2} f_1^{\,2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & r_2^{\,2} & r_3^{\,2} & r_4^{\,3} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ r_2^{\,2} & 1 & 0 & c_{23}^{\,2} & c_{24}^{\,2} \\ r_3^{\,2} & 1 & c_{23}^{\,2} & 0 & c_{34}^{\,2} \\ r_4^{\,2} & 1 & c_{24}^{\,2} & c_{34}^{\,2} & 0 \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Man hat demnach:

$$58)\quad \varDelta_2 + \varDelta_3 + \varDelta_4 + \varDelta_5 = \varDelta_1 + \varDelta_6 + \varDelta_7 + \varDelta_8 =$$
$$= 16\,D^4 \varrho^2 - 64\,D^2 (r_1^{\,2} P_1^{\,2} f_1^{\,2} + r_2^{\,2} P_2^{\,2} f_2^{\,2} + r_3^{\,2} P_3^{\,2} f_3^{\,2} + r_4^{\,2} P_4^{\,2} f_4^{\,2}).$$

In derselben Weise erhält man:

$$59)\quad V_2^{\,2} + V_3^{\,2} + V_4^{\,2} + V_5^{\,2} = V_1^{\,2} + V_6^{\,2} + V_7^{\,2} + V_8^{\,2} =$$
$$= 4\,D^2 - 16\,(r_1^{\,2} f_1^{\,2} + r_2^{\,2} f_2^{\,2} + r_3^{\,2} f_3^{\,2} + r_4^{\,2} f_4^{\,2}).$$

Nun ist nach Gl. 50:

$$\varDelta_1 = D^4 \varrho^4 \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1'}\right)^2 \text{ und } V_1^{\,2} = -\frac{D^2 \varrho^2}{\varrho_1\,\varrho_1'},\ \text{folglich:}$$

$$\varDelta_1 - 4\,D^2 \varrho^2 V_1^{\,2} = D^4 \varrho^4 \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1'}\right)^2;$$

man hat daher auch, wenn man, wie Schubert a. a. O., das Produkt der reciproken Radien zweier conjugirten Kugeln mit q_λ und das Quadrat ihrer Summe mit π_λ bezeichnet:

$$60)\quad \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = \pi_1 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8 =$$
$$= \frac{64}{D^2 \varrho^4}\Big[r_1^{\,2} f_1^{\,2} (\varrho^2 - P_1^{\,2}) + r_2^{\,2} f_2^{\,2} (\varrho^2 - P_2^{\,2}) r_3^{\,2} f_3^{\,2} (\varrho^2 - P_3^{\,2}) + r_4^{\,2} f_4^{\,2} (\varrho^2 - P_4^{\,2})\Big] \text{ und}$$

$$61)\quad q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = q_1 + q_6 + q_7 + q_8 =$$
$$= \frac{16}{D^2 \varrho^2}\left(r_1^{\,2} f_1^{\,2} + r_2^{\,2} f_2^{\,2} + r_3^{\,2} f_3^{\,2} + r_4^{\,2} f_4^{\,2} - \tfrac{1}{4} D^2\right).$$

Ferner folgt aus Gl. 50:

$$(\nu + 2\,r_1 \lambda)^2 = 4\,D^2 V_1^{\,2} R_1^{\,2} - 4\,D^2 \varrho^2 V_1^{\,2} = \varDelta_1 - 4\,D^2 \varrho^2 V_1^{\,2} = D^4 \varrho^4 \pi_1\,.$$

Entwickelt man also die Determinante auf der rechten Seite von Gl. 55 nach Elementen der ersten Vertikalreihe, so dass man eine Summe von 4 Posten erhält, welche bezüglich die Factoren r_1, r_2, r_3, r_4 enthalten und wie bei Schubert durch l_1, l_2, l_3, l_4 bezeichnet werden sollen, so erhält man nach der Erhebung ins Quadrat für die 8 Paare von Berührungskugeln die von Schubert gefundenen Gleichungen:

$$\pi_1 = (+\,l_1 + l_2 + l_3 + l_4)^2, \qquad \pi_2 = (-\,l_1 + l_2 + l_3 + l_4)^2,$$
$$\pi_6 = (-\,l_1 - l_2 + l_3 + l_4)^2, \qquad \pi_3 = (+\,l_1 - l_2 + l_3 + l_4)^2,$$
$$\pi_7 = (-\,l_1 + l_2 - l_3 + l_4)^2, \qquad \pi_4 = (+\,l_1 + l_2 - l_3 + l_4)^2,$$
$$\pi_8 = (-\,l_1 + l_2 + l_3 - l_4)^2, \qquad \pi_5 = (+\,l_1 + l_2 + l_3 - l_4)^2.$$

Da aber $\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = \pi_1 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8 = 4\,(l_1^{\,2} + l_2^{\,2} + l_3^{\,2} + l_4^{\,2})$ ist, so lehrt die Vergleichung dieser Relation mit Gl. 60, dass:

$$62)\quad \begin{cases} l_1 = \dfrac{4\,r_1 f_1 \sqrt{\varrho^2 - P_1^{\,2}}}{D\,\varrho^2}, & l_2 = \dfrac{4\,r_2 f_2 \sqrt{\varrho^2 - P_2^{\,2}}}{D\,\varrho^2}, \\[2ex] l_3 = \dfrac{4\,r_3 f_3 \sqrt{\varrho^2 - P_3^{\,2}}}{D\,\varrho^2}, & l_4 = \dfrac{4\,r_4 f_4 \sqrt{\varrho_2 - P_4^{\,2}}}{D\,\varrho^2}, \end{cases}$$

wo überall das positive Zeichen für die Quadratwurzeln zu nehmen ist.

Die von Schubert aus seinen obigen Gleichungen gefundenen Relationen:

$$\begin{aligned} &(\pi_1 + \pi_6 - \pi_7 - \pi_8)^2 - (\pi_2 + \pi_3 - \pi_4 - \pi_5)^2 = \\ &= (\pi_1 + \pi_7 - \pi_6 - \pi_8)^2 - (\pi_2 + \pi_4 - \pi_3 - \pi_5)^2 = \\ &= (\pi_1 + \pi_8 - \pi_6 - \pi_7)^2 - (\pi_2 + \pi_5 - \pi_3 - \pi_4)^2 = \\ &= \frac{(\pi_1 + \pi_6 - \pi_7 - \pi_8)(\pi_1 + \pi_7 - \pi_6 - \pi_8)(\pi_1 + \pi_8 - \pi_6 - \pi_7)}{\pi_1 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8} - \\ &\qquad - \frac{(\pi_2 + \pi_3 - \pi_4 - \pi_5)(\pi_2 + \pi_4 - \pi_3 - \pi_5)(\pi_2 + \pi_5 - \pi_3 - \pi_4)}{\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5} \end{aligned}$$

haben auf jeder Seite den Werth $256\, l_1\, l_2\, l_3\, l_4$ d. h. nach 62:

$$\frac{16^4 r_1 r_2 r_3 r_3 f_1 f_2 f_3 f_4 \sqrt{(\varrho^2 - P_1^{\,2})(\varrho^2 - P_2^{\,2})(\varrho^2 - P_3^{\,2})(\varrho^2 - P_4^{\,2})}}{D^4\,\varrho^8}. \quad (63)$$

Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Theile unserer Untersuchung, nämlich zur Bestimmung der Modalität der Lösungen. Je nachdem die Gleichungen 22 und 23 entweder jede zwei Wurzeln von demselben Zeichen oder von verschiedenen Zeichen liefern, hat man zwei gleichartige Schnitte bezüglich Berührungen oder zwei ungleichartige. Beschränkt man sich auf den Fall der Berührungen, wo $\omega = 0$ ist, und bedenkt man, dass das constante Glied in beiden Gleichungen $A^2 + B^2 + C^2$, als die Summe dreier Quadrate, immer positiv ist, so ergibt sich, dass Wurzeln von demselben Zeichen dann vorhanden sind, wenn die Grösse $A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2$ oder $-V_1^{\,2}$ positiv, Wurzeln von ungleichem Zeichen, wenn diese Grösse negativ ist. Hiernach ist die vollständige Determination der Aufgabe in sehr einfacher Form möglich; man kann nämlich sagen, dass das erste Paar conjugirter Kugeln existire, sobald V_1 und R_1 entweder beide zugleich reell oder beide zugleich imaginär seien und dass im ersten Falle ungleichartige, im zweiten gleichartige Berührungen stattfinden. Aehnliches gilt mutatis mutandis für die übrigen sieben Kugelpaare.

Der Ausdruck:

$$V_1^2 = \begin{vmatrix} 1 & r_1 - r_2 & r_1 - r_3 & r_1 - r_4 \\ r_1 - r_2 & k & l & m \\ r_1 - r_3 & l & k' & n \\ r_1 - r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k - (r_1 - r_2)^2 & l - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) & m - (r_1 - r_2)(r_1 - r_4) \\ l - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) & k' - (r_1 - r_3)^2 & n - (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) \\ m - (r_1 - r_2)(r_1 - r_4) & n - (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) & k'' - (r_1 - r_4) \end{vmatrix}$$

lässt übrigens noch eine merkwürdige Umformung zu, welche eine sehr anschauliche geometrische Bedeutung hat. Bevor wir dieselbe ausführen, müssen wir noch ein Paar neue Bezeichnungen einführen. Die zu:

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = D \text{ adjungirte Determinante sei nämlich:}$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = D^2$$

$$\text{und die zu } \begin{vmatrix} k & l & m \\ l & k' & n \\ m & n & k'' \end{vmatrix} = D^2 \text{ adjungirte Determinante sei:}$$

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ L & K' & N \\ M & N & K'' \end{vmatrix} = D^4;$$

dann findet man leicht folgende Identitäten:

$$64) \begin{cases} K = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2, \quad K' = A_3^2 + B_3^2 + C_3^2, \quad K'' = A_4^2 + B_4^2 + C_4^2, \\ L = A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3, \quad M = A_2 A_4 + B_2 B_4 + C_2 C_4, \quad N = A_3 A_4 + B_3 B_4 + C_3 C_4. \end{cases}$$

Entwickelt man nun das Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix} r_1 - r_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ r_1 - r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ r_1 - r_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{ oder } (r_1 - r_2) K + (r_1 - r_3) L + (r_1 - r_4) M,$$

welche wir mit S bezeichnen wollen, so ist:

$$S^2 = \begin{vmatrix} k+(r_1-r_2)^2 & l+(r_1-r_2)(r_1-r_3) & m+(r_1-r_2)(r_1-r_3) & A_2\alpha_2+B_2\beta_2+C_2\gamma_2 \\ l+(r_1-r_2)(r_1-r_3) & k'+(r_1-r_3)^2 & n+(r_1-r_3)(r_1-r_4) & A_2\alpha_3+B_2\beta_3+C_2\gamma_3 \\ m+(r_1-r_2)(r_1-r_4) & n+(r_1-r_3)(r_1-r_4) & k''+(r_1-r_4)^2 & A_2\alpha_4+B_2\beta_4+C_2\gamma_4 \\ A_2\alpha_2+B_2\beta_2+C_2\gamma_2 & A_2\alpha_3+B_2\beta_2+C_2\gamma_3 & A_2\alpha_4+B_2\beta_4+C_2\gamma_4 & A_2^2+B_2^2+C_2^2 \end{vmatrix}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $A_2^2+B_2^2+C_2^2=K$, $A_2\alpha_2+B_2\beta_2+C_2\gamma_2=D$, $A_2\alpha_3+B_2\beta_3+C_3\gamma_3=A_2\alpha_4+B_2\beta_4+C_2\gamma_4=0$ ist, durch Entwicklung nach den Produkten der Elemente der letzten Horizontal- und Vertikalreihe:

$$S^2 = K\begin{vmatrix} 1 & -(r_1-r_2) & -(r_1-r_3) & -(r_1-r_4) \\ r_1-r_2 & k & l & m \\ r_1-r_3 & l & k' & n \\ r_1-r_4 & m & n & k'' \end{vmatrix} - D^2\begin{vmatrix} 1 & -(r_1-r_3) & -(r_1-r_4) \\ r_1-r_3 & k' & n \\ r_1-r_4 & n & k'' \end{vmatrix}.$$

Die mit K multiplicirte Determinante ist aber gleich $2D^2-V_1^2$ und die mit D^2 multiplicirte gleich $2K-4F_2^2$, wo unter F_2 diejenige Fläche des Tetraeders V_1 zu verstehen ist, welcher die Kantenquadrate d_{13}, d_{14} und d_{34} zugehören; denn es ist nach Gl. 34:

$$\begin{vmatrix} 1 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ r_1-r_3 & k' & n \\ r_1-r_4 & n & k'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & r_1-r_3 & r_1-r_4 \\ r_1-r_3 & d_{13}+(r_1-r_3)^2 & \frac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34})+(r_1-r_3)(r_1-r_4) \\ r_1-r_4 & \frac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34})+(r_1-r_3)(r_1-r_4) & d_{14}+(r_1-r_4)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} d_{13} & \frac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34}) \\ \frac{1}{2}(d_{13}+d_{14}-d_{34}) & d_{14} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{13} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 4F_2^2;$$

vergl. Baltzer Det. §. 16. 13.

Hiernach ist also:

$$S^2 = K(2D^2-V_1^2) - D^2(2K-4F_2^2) = -KV_1^2+4D^2F_2^2 \text{ oder:}$$

$$65) \qquad -V_1^2 = \frac{S^2-4D^2F_2^2}{K}.$$

Legen wir nun an die Kugeln k_1, k_2, k_3 die zwei gemeinschaftlichen äusseren Tangentialebenen und fällen auf sie vom Mittelpunkte der Kugel k_2 die Senkrechten P_2 und P_2', so lässt sich beweisen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung gleich

$$K(P_2 - r_2)(P_2' - r_2)$$

ist, und da K, wie bald erhellen wird, immer positiv ist, so hängt das Zeichen der Probegrösse $-V_1^2$ nur von den Zeichen der Factoren des Produktes $(P_2 - r_2)(P_2' - r_2)$ ab, wobei zu bemerken ist, dass das Zeichen der P entweder positiv oder negativ genommen werden muss, je nachdem der Mittelpunkt von k_2 auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der zugehörigen Tangentialebene liegt, wie der Mittelpunkt von k_1, den wir zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen haben.

Zum Zwecke des Beweises ist es nöthig, die Gleichungen der gemeinschaftlichen äusseren Tangentialebenen an k_1, k_3, k_4 zu entwickeln. Um die Gleichungen aller 8 möglichen Tangentialebenen auf einmal zu erhalten, könnten wir den von Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes, 1. Aufl., pag. 97, gelehrten Weg einschlagen. Wir würden dann am Ende zu einer Determinante des 11ten Grades gelangen, welche in Bezug auf die Coordinaten x, y, z vom 8ten Grade wäre; diese Determinante hätten wir dann noch in 8 lineare Factoren zu zerlegen. Da aber dieser Weg für die praktische Ausführung etwas umständlich ist und zu sehr weitläufigen Rechnungen führt, so wollen wir lieber ein Paar Tangentialebenen nach dem anderen auf einem für diesen speciellen Fall geeigneteren Wege suchen. Eine gemeinschaftliche äussere Tangentialebene an die Kugeln k_1, k_3, k_4 in der Normalform kann nämlich nacheinander die Formen annehmen:

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - r_1 &= 0, \\ (x-\alpha_3)\cos\alpha + (y-\beta_3)\cos\beta + (z-\gamma_3)\cos\gamma - r_3 &= 0, \\ (x-\alpha_4)\cos\alpha + (y-\beta_4)\cos\beta + (z-\gamma_4)\cos\gamma - r_4 &= 0, \end{aligned}$$

wenn man das Coordinatensystem nach einander parallel mit sich selber vom Mittelpunkt der ersten Kugel nach den Mittelpunkten der dritten und vierten verschiebt. Daraus folgen aber die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_3\cos\alpha + \beta_3\cos\beta + \gamma_3\cos\gamma &= r_1 - r_3, \\ \alpha_4\cos\alpha + \beta_4\cos\beta + \gamma_4\cos\gamma &= r_1 - r_4, \end{aligned}$$

welche in Verbindung mit der ersten der drei obigen Gleichungen für die Cosinusse folgende Werthe ergeben:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \beta_4 \end{vmatrix} \cos\alpha = \begin{vmatrix} r_1 & y & z \\ r_1 - r_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ r_1 - r_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} \cos\beta = \begin{vmatrix} x & r_1 & z \\ \alpha_2 & r_1 - r_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & r_1 - r_4 & \gamma_4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} \cos\gamma = \begin{vmatrix} x & y & r_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix}.$$

Die bekannte Relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ liefert dann mit diesen Werthen der Cosinusse als Gleichung der zwei conjugirten äusseren Tangentialebenen:

$$66)\quad \begin{vmatrix} r_1 & y & z \\ r_1 - r_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ r_1 - r_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & r_1 & z \\ \alpha_3 & r_1 - r_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & r_1 - r_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y & r_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_1 - r_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & r_1 - r_4 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix};$$

will man dieselbe in der Normalform haben, so muss man sie noch mit dem Coefficienten, den $r_1{}^2$ nach der Entwickelung erhält, dividiren. Dieser Coefficient ist aber gleich:

$$\begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}^2 = A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2 = K.$$

Der Gleichung der Tangentialebene kann man noch eine andere Form geben, durch welche ihre Zerfällbarkeit in 2 Factoren des ersten Grades ersichtlich wird. Addirt man nämlich auf beiden Seiten derselben das Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = A_2 x + B_2 y + C_2 z,$$

so geht die linke Seite derselben nach Baltzer Det. §. 5. 2 über in die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + r_1{}^2 & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + r_1(r_1 - r_3) & \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + r_1(r_1 - r_4) \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + r_1(r_1 - r_3) & k' + (r_1 - r_3)^2 & n + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) \\ \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + r_1(r_1 - r_4) & n + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) & k'' + (r_1 - r_4)^2 \end{vmatrix},$$

welche wir mit R bezeichnen wollen, so dass diese Gleichung jetzt heisst:

$$R - 2(A_2 x + B_2 y + C_2 z)^2 = 0.$$

Nennen wir aber S' die Determinante:

$$\begin{vmatrix} r_1 & x & y & z \\ r_1 - r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ r_1 - r_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

so ist:

$$S'^2 = \begin{vmatrix} x_2 + y_2 + z_2 + r_1{}^2 & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + r_1(r_1 - r_3) & \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + r_1(r_1 - r_4) & A_2 x + B_2 y + C_2 z \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + r_1(r_1 - r_3) & k' + (r_1 - r_3)^2 & n + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) & A_2\alpha_3 + B_2\beta_3 + C_2\gamma_3 \\ \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + r_1(r_1 - r_4) & n + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) & k'' + (r_1 - r_4)^2 & A_2\alpha_4 + B^2\beta_4 + C_2\gamma_4 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z & A_2\alpha_3 + B_2\beta_3 + C_2\gamma_3 & A_2\alpha_4 + B_2\beta_4 + C_2\gamma_4 & A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2 \end{vmatrix};$$

durch die Bemerkung, dass

$$A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 = K \text{ und } A_2\alpha_3 + B_2\beta_3 + C_2\gamma_3 = A_2\alpha_4 + B_2\beta_4 + C_2\gamma_4 = 0$$

ist, erhält man hieraus, wenn man nach den Produkten der Elemente der letzten Horizontal- und Vertikalreihe entwickelt:

$$S'^2 = KR - (A_2 x + B_2 y + C_2 z)^2 . \begin{vmatrix} k' + (r_1 - r_3)^2 & n + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) \\ n + (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) & k'' + (r_1 - r_4)^2 \end{vmatrix};$$

die Determinante auf der rechten Seite hat den Werth $2K - 4F_2^2$, so dass endlich

$$S'^2 = KR - (2K - 4F_2^2)(A_2 x + B_2 y + C_2 z)^2$$

herauskommt. Substituirt man aus dieser Relation den Werth von R in die Gleichung der Tangentialebene, so erhält man für dieselbe die neue Form:

$$67)\qquad S'^2 - 4F_2^2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z)^2 = 0,$$

welche sofort in die beiden Factoren:

$$S' \pm 2F_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z) = 0$$

zerfällt, welche man, um sie auf die Normalform zu reduciren, jeden durch K zu dividiren hat. Wir wollen hierbei bemerken, dass auch die Grösse K eine einfache geometrische Bedeutung hat; sie ist nämlich gleich $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2$, d. h. gleich der Summe der Quadrate der Projectionen der doppelten Fläche des Dreiecks der Mittelpunkte 1, 3, 4 auf die drei Coordinatenebenen, folglich gleich dem Quadrate dieser doppelten Dreiecksfläche selber, d. h. gleich $4f_2^2$.

Wäre, um die Aufgabe allgemeiner zu stellen, verlangt worden, die Gleichung der Tangentialebene an die Kugeln k_2, k_3, k_4 zu finden, so hätte man von den Gleichungen ausgehen müssen:

$$\begin{aligned}
(x - \alpha_2)\cos\alpha + (y - \beta_2)\cos\beta + (z - \gamma_2)\cos\gamma - r_2 &= 0, \\
(x - \alpha_3)\cos\alpha + (y - \beta_3)\cos\beta + (z - \gamma_3)\cos\gamma - r_3 &= 0, \\
(x - \alpha_4)\cos\alpha + (y - \beta_4)\cos\beta + (z - \gamma_4)\cos\gamma - r_4 &= 0,
\end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$\begin{aligned}
(\alpha_3 - \alpha_2)\cos\alpha + (\beta_3 - \beta_2)\cos\beta + (\gamma_3 - \gamma_2)\cos\gamma &= r_2 - r_3, \\
(\alpha_4 - \alpha_2)\cos\alpha + (\beta_4 - \beta_2)\cos\beta + (\gamma_4 - \gamma_2)\cos\gamma &= r_2 - r_4.
\end{aligned}$$

Man hätte daher in Gl. 67 r_1 mit r_2, α_3, β_3, γ_3, α_4, β_4, γ_4 mit $\alpha_3 - \alpha_2$, $\beta_3 - \beta_2$, $\gamma_3 - \gamma_2$, $\alpha_4 - \alpha_2$, $\beta_4 - \beta_2$, $\gamma_4 - \gamma_2$ und x, y, z mit $x - \alpha_2$, $y - \beta_2$, $z - \gamma_2$ zu vertauschen; dadurch gehen A_2, B_2, C_2 bezüglich über in $A_2 + A_3 + A_4$, $B_2 + B_3 + B_4$, $C_2 + C_3 + C_4$ und K in Folge dessen und der Identitäten 64 in $K + K' + K'' + 2L + 2M + 2N$, was gleich $4f_1^2$ ist; vergl. Baltzer Det. §. 17. 8. Die Gleichung für die Tangentialebenen hiesse alsdann:

$$68)\quad S'^2 - 4\,F_1^{\,2}[(A_2+A_3+A_4)x+(B_2+B_3+B_4)y+(C_2+C_3+C_4)z]^2,$$

wo unter S' die Determinante:

$$\begin{vmatrix} r_2 & x-\alpha_2 & y-\beta_2 & z-\gamma_2 \\ r_2-r_3 & \alpha_3-\alpha_2 & \beta_3-\beta_2 & \gamma_3-\gamma_2 \\ r_2-r_4 & \alpha_4-\alpha_2 & \beta_4-\beta_2 & \gamma_4-\gamma_2 \\ 0 & A_2+A_3+A_4 & B_2+B_3+B_4 & C_2+C_3+C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & r_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 1 & r_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & A_2+A_3+A_4 & B_2+B_3+B_4 & C_2+C_3+C_4 \end{vmatrix}$$

zu verstehen wäre.

Gehen wir nach dieser Abschweifung wieder auf Gl. 67 zurück und setzen in derselben $x=\alpha_2$, $y=\beta_2$, $z=\gamma_2$, so bekommt man, weil

$$\begin{vmatrix} r_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ r_1-r_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ r_1-r_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = r_1\,K+(r_1-r_3)\,L+(r_1-r_4)\,M \text{ und } A_2\,\alpha_2+B_2\,\beta_2+C_2\,\gamma_2 = D \text{ ist,}$$

$$P_2\,K = r_1\,K+(r_1-r_3)\,L+(r_1-r_4)\,M+2\,D\,F_2 \text{ und}$$
$$P_2'K = r_1\,K+(r_1-r_3)\,L+(r_1-r_4)\,M-2\,D\,F_2\,.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichungen $r_2\,K$, so ist:

$$(P_2-r_2)\,K = (r_1-r_2)\,K+(r_1-r_3)\,L+(r_1-r_4)\,M+2\,D\,F_2 \text{ und}$$
$$(P_2'-r_2)\,K = (r_1-r_2)\,K+(r_1-r_3)\,L+(r_1-r_4)\,M-2\,D\,F_2,$$

woraus durch Multiplication folgt:

$$K(P_2-r_2)\,(P_2'-r_2) = \frac{[(r_1-r_2)\,K+(r_1-r_3)\,L+(r_1-r_4)\,M]^2-4\,D^2\,F_2^{\,2}}{K},$$

also derselbe Werth, den wir oben (Gl. 65) gleich $-V_1^{\,2}$ gefunden haben.

Ganz in derselben Weise findet man:

$$4f_3^{\,2}(P_3-r_3)(P_3'-r_3) = \frac{[(r_1-r_3)\,K'+(r_1-r_2)\,L+(r_1-r_4)\,N]^2-4\,D^2\,F_3^{\,2}}{K'} = -V_1^{\,2},$$

$$4f_4^{\,2}(P_4-r_4)(P_4'-r_4) = \frac{[(r_1-r_4)K''+(r_1-r_3)\,N+(r_1-r_2)M]^2-4\,D^2\,F_4^{\,2}}{K''} = -V_1^{\,2},$$

$$4f_1^{\,2}(P_1-r_1)(P_1'-r_1) =$$
$$= \frac{[(r_1-r_2)(K+K'+K''+2\,L+2\,M+2\,N)+(r_2-r_3)(L+K'+N)+(r_2-r_4)(M+N+K'')]^2-4\,D^2F_1^{\,2}}{K+K'+K''+2\,L+2\,M+2\,N} =$$
$$= -V_1^{\,2}.$$

Hieraus folgt die merkwürdige Relation:

$$69)\quad 4f_1^{\,2}(P_1-r_1)(P_1'-r_1) = 4f_2^{\,2}(P_2-r_2)(P_2'-r_2) = 4f_3^{\,2}(P_3-r_3)(P_3'-r_3) = 4f_4^{\,2}(P_4-r_4)(P_4'-r_4) = -V_1^{\,2}.$$

Für die folgenden Paare conjugirter Kugeln lassen sich ähnliche Relationen aufstellen, zu deren Herleitung man die Gleichungen der drei Paare innerer Tangentialebenen an je 3 der Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 nöthig hat. Diese Gleichungen können aber aus den Gleichungen der äusseren Tangentialebenen durch blosse Vertauschung der Zeichen und Buchstaben gefunden werden. Um beispielsweise die Gleichungen derjenigen inneren Tangentialebenen an k_1, k_3, k_4 zu finden, welche k_3 und k_4 gleichartig, aber auf der entgegengesetzten Seite wie k_1 berühren, hat man in den oben gegebenen Gleichungen der äusseren Tangentialebenen r_1 mit $-r_1$, und $\overset{r_1}{F}_2$ mit F_2 zu vertauschen, wo man unter $\overset{r_1}{F}_2$ den Flächeninhalt desjenigen Dreiecks zu verstehen hat, welches von den Verbindungsstrecken der Berührungspunkte auf k_1, k_3, k_4 gebildet wird, so dass $4\overset{r_1}{F}_2{}^2 = \delta_{13}\,\delta_{14} - \frac{1}{4}(\delta_{13} + \delta_{14} - d_{34})^2$. Sollen die Gleichungen derjenigen inneren Tangentialebenen gefunden werden, welche k_1 und k_4 gleichartig aber auf der entgegengesetzten Seite wie k_3, berühren, so hat man in den Gleichungen der äusseren Tangentialebenen r_3 mit $-r_3$ und F_2 mit $\overset{r_3}{F}_2$ zu vertauschen, wo $4\overset{r_3}{F}_2{}^2 = d_{13}\,\delta_{14} - \frac{1}{4}(d_{13} + \delta_{14} - \delta_{34})^2$ u. s. w. Nennt man nun $\overset{r_2}{\Pi}_1$ und $\overset{r_2}{\Pi}_1{}'$ die beiden Senkrechten vom Mittelpunkt 1 auf diejenigen gemeinschaftlichen inneren Tangentialebenen von k_2, k_3, k_4, welche k_3 und k_4 gleichartig, aber auf der entgegengesetzten Seite wie k_2, berühren, $\overset{r_3}{\Pi}_1$ und $\overset{r_3}{\Pi}_1{}'$ die beiden Senkrechten vom Mittelpunkt 1 auf diejenigen gemeinschaftlichen inneren Tangentialebenen an k_2, k_3, k_4, welche k_2 und k_4 gleichartig, aber auf der entgegengesetzten Seite wie k_3, berühren, $\overset{r_4}{\Pi}_1$ und $\overset{r_4}{\Pi}_1{}'$ die beiden Senkrechten, vom Mittelpunkt 1 auf diejenigen gemeinschaftlichen inneren Tangentialebenen an k_2, k_3, k_4, welche k_2 und k_3 gleichartig, aber auf der entgegengesetzten Seite wie k_4, berühren; haben ferner $\overset{r_1}{\Pi}_2$ und $\overset{r_1}{\Pi}_2{}'$, $\overset{r_3}{\Pi}_2$ und $\overset{r_3}{\Pi}_2{}'$, $\overset{r_4}{\Pi}_2$ und $\overset{r_4}{\Pi}_2{}'$ etc. analoge Bedeutung, so findet man vorerst in der nämlichen Weise wie oben die Werthe dieser Senkrechten. Man hat beispielsweise:

$$\overset{r_1}{\Pi}_2 K \text{ und } \overset{r_1}{\Pi}_2{}' K = -r_1 K - (r_1 + r_3) L - (r_1 + r_4) M \pm 2 D \overset{r_1}{F}_2,$$

$$\overset{r_3}{\Pi}_2 K \text{ und } \overset{r_3}{\Pi}_2{}' K = r_1 K + (r_1 + r_3) L + (r_1 - r_4) M \pm 2 D \overset{r_3}{F}_2,$$

$$\overset{r_4}{\Pi}_2 K \text{ und } \overset{r_4}{\Pi}_2{}' K = r_1 K + (r_1 - r_3) L + (r_1 + r_4) M \pm 2 D \overset{r_4}{F}_2.$$

Bei dieser Gelegenheit kann man noch folgende Bemerkung machen. Addirt man nämlich die 6 letzten Gleichungen, so erhält man für die Summe aller $\Pi_2 K$ den Werth $2[r_1 K + (r_1 - r_3) L + (r_1 - r_4) M]$; den nämlichen Werth erhält man aber auch durch Addition von $P_2 K$ und $P_2{}' K$, so dass:

$$70)\qquad P_2+P_2'=\overset{r_1}{\Pi}_2+\overset{r_1}{\Pi}_2'+\overset{r_3}{\Pi}_2+\overset{r_3}{\Pi}_2'+\overset{r_4}{\Pi}_2+\overset{r_4}{\Pi}_2'$$

oder in Worten ausgedrückt: Wenn man von irgend einem Punkte des Raums auf die zwei gemeinschaftlichen äusseren und auf die sechs gemeinschaftlichen inneren Tangentialebenen dreier Kugeln Senkrechten fällt, so ist die algebraische Summe der zwei ersten Senkrechten gleich der algebraischen Summe der sechs letzten.

Indem man analog verfährt und schliesst wie bei dem ersten Paar conjugirter Kugeln, erhält man für die übrigen 7 Paare die Relationen:

$$71)\quad\left\{\begin{aligned}
&4f_1^2(P_1+r_1)(P_1'+r_1)=4f_2^2(\overset{r_1}{\Pi}_2-r_2)(\overset{r_1}{\Pi}_2'-r_2)=4f_3^2(\overset{r_1}{\Pi}_3-r_3)(\overset{r_1}{\Pi}_3'-r_3)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(\overset{r_1}{\Pi}_4-r_4)(\overset{r_1}{\Pi}_4'-r_4)=-V_2^2,\\
&4f_1^2(\overset{r_2}{\Pi}_1-r_1)(\overset{r_2}{\Pi}_1'-r_1)=4f_2^2(P_2+r_2)(P_2'+r_2)=4f_3^2(\overset{r_2}{\Pi}_3-r_3)(\overset{r_2}{\Pi}_3'-r_3)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(\overset{r_2}{\Pi}_4-r_4)(\overset{r_2}{\Pi}_4'-r_4)=-V_3^2,\\
&4f_1^2(\overset{r_3}{\Pi}_1-r_1)(\overset{r_3}{\Pi}_1'-r_1)=\mathrm{r}f_2^2(\overset{r_3}{\Pi}_2-r_2)(\overset{r_3}{\Pi}_2'-r_2)=4f_3^2(P_3+r_3)(P_3'+r_3)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(\overset{r_3}{\Pi}_4-r_4)(\overset{r_3}{\Pi}_4'-r_4)=-V_4^2,\\
&4f_1^2(\overset{r_4}{\Pi}_1-r_1)(\overset{r_4}{\Pi}_1'-r_1)=4f_2^2(\overset{r_4}{\Pi}_2-r_2)(\overset{r_4}{\Pi}_2'-r_2)=4f_3^2(\overset{r_4}{\Pi}_3-r_3)(\overset{r_4}{\Pi}_3'-r_3)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(P_4+r_4)(P_4'+r_4)=-V_5^2,\\
&4f_1^2(\overset{r_2}{\Pi}_1+r_1)(\overset{r_2}{\Pi}_1'+r_1)=4f_2^2(\overset{r_1}{\Pi}_2+r_2)(\overset{r_1}{\Pi}_2'+r_2)=4f_3^2(\overset{r_4}{\Pi}_3+r_3)(\overset{r_4}{\Pi}_3'+r_3)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(\overset{r_3}{\Pi}_4+r_4)(\overset{r_3}{\Pi}_4'+r_4)=-V_6^2,\\
&4f_1^2(\overset{r_3}{\Pi}_1+r_1)(\overset{r_3}{\Pi}_1'+r_1)=4f_2^2(\overset{r_4}{\Pi}_2+r_2)(\overset{r_4}{\Pi}_2'+r_2)=4f_3^2(\overset{r_1}{\Pi}_3+r_3)(\overset{r_1}{\Pi}_3'+r_3)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(\overset{r_2}{\Pi}_4+r_4)(\overset{r_2}{\Pi}_4'+r_4)=-V_7^2,\\
&4f_1^2(\overset{r_4}{\Pi}_1+r_1)(\overset{r_4}{\Pi}_1'+r_1)=4f_2^2(\overset{r_3}{\Pi}_2+r_2)(\overset{r_3}{\Pi}_2'+r_2)=4f_3^2(\overset{r_2}{\Pi}_3+r_3)(\overset{r_2}{\Pi}_3'+r_2)=\\
&\qquad\qquad=4f_4^2(\overset{r_1}{\Pi}_4+r_4)(\overset{r_1}{\Pi}_4'+r_4)=-V_8^2.
\end{aligned}\right.$$

Das Zeichen der Produkte, welche die eingeklammerten Grössen zu Factoren haben, gibt auch in diesen Fällen Aufschluss darüber, ob die Lösungen gleichartig oder ungleichartig sind. Da nun jedes dieser Produkte, multiplicirt mit $4f^2$ gleich einem $-V^2$ ist, diese letztere Grösse aber, wie wir gesehen haben, immer die Form $\frac{S^2-4D^2F^2}{4f^2}$ annehmen kann, so wird diese Grösse und folglich auch die zugehörigen Produkte für irgend ein Paar conjugirter Berührungskugeln positiv werden und die Berührungen also gleichartig sein müssen, sobald eines der F imaginär wird, was geschieht, wenn eine oder zwei der das betreffende Dreieck einschliessenden Tetraederkanten imaginär sind. Da nun die F auch in den Gleichungen der äusseren und inneren Tangentialebenen vorkommen, so werden diese ebenso wie die darauf gefällten Senkrechten ebenfalls imaginär, wenn eines der F imaginär ist. Man kann also sagen, die Berührungen seien, ihre Möglichkeit vorausgesetzt, immer gleichartig und zwar für das erste Paar conjugirter Kugeln, wenn die gegebenen Kugeln eine solche Lage haben, dass ein oder mehrere Paare der äusseren Tangentialebenen unmöglich sind, d. h. wenn zwei oder mehrere der gegebenen Kugeln sich einschliessen; für das zweite Paar, wenn die äusseren Tangentialebenen an k_2, k_3, k_4 unmöglich sind, d. h. wenn eine dieser Kugeln die zwei anderen einschliesst, oder wenn ein oder mehrere Paare der inneren Tangentialebenen an k_1, k_2, k_3 oder k_1, k_2, k_4 oder k_1, k_3, k_4 unmöglich werden, d. h. wenn eine oder mehrere der Kugeln k_2, k_3, k_4 von k_1 geschnitten oder eingeschlossen werden oder umgekehrt, während von jenen sich wenigstens zwei schneiden oder einschliessen. Aehnliches gilt für das 3te, 4te und 5te Paar. Beim 6ten, 7ten und 8ten Paar werden die Berührungen immer gleichartig, sobald irgend eines oder mehrere der inneren Tangentialebenenpaare unmöglich sind, d. h. wenn irgend welche drei von den gegebenen vier Kugeln sich schneiden oder in einander liegen.

Einen Fall haben wir noch zu erwähnen, in welchem die bisher aufgestellten Regeln über die Modalität der Lösungen eine Ausnahme erleiden. Derselbe tritt dann ein, wenn drei der gegebenen Kugeln sich in einem Punkte schneiden, welcher von der vierten umschlossen wird. Zeigen in diesem Falle unsere Regeln gleichartige Berührungen an, so ergeben sich in Wirklichkeit ungleichartige und umgekehrt. Es fragt sich, wie dieser Widerspruch zwischen der Rechnung unb dem thatsächlichen Verhalten zu erklären sei oder ob es nicht vielmehr ein scheinbarer Widerspruch sei. Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von dem Grenzfalle aus, in welchem alle 4 Kugeln durch einen und denselben Punkt gehen; es lässt lässt sich leicht errathen, dass dann eine der conjugirten Berührungskugeln verschwindet, bezüglich einen Radius von der Grösse Null hat, was analytisch in folgender Weise bewiesen wird. Sieht man in den Gleichungen 1, 2, 3, 4 des ersten Theiles dieser Abhandlung die x, y, z als demselben Punkte angehörig an und zieht 2, 3 und 4 der Reihe nach von 1 ab, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen 10, 11 und 12 nach leichter Reduction:

$$2\,\alpha_2 x + 2\,\beta_2 y + 2\,\gamma_2 z = d_{12} + 2\,r_1\,(r_1 - r_2),$$
$$2\,\alpha_3 x + 2\,\beta_3 y + 2\,\gamma_3 z = d_{13} + 2\,r_1\,(r_1 - r_3),$$
$$2\,\alpha_4 x + 2\,\beta_4 y + 2\,\gamma_4 z = d_{14} + 2\,r_1\,(r_1 - r_4),$$

und hieraus, wenn man sich an die Bedeutung der Buchstaben A, B, C, A', B', C' erinnert:

$$2\,Dx = 2\,r_1\,A' + A,$$
$$2\,Dy = 2\,r_1\,B' + B,$$
$$2\,Dz = 2\,r_1\,C' + C.$$

Durch diese Werthe von x, y und z wird die Gleichung 1:

$$4\,r_1^{\,2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2) + 4\,r_1\,(AA' + BB' + CC') + A^2 + B^2 + C^2 = 4\,D^2\varrho^2 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gl. 22, welche für $\omega = 0$ lautet:

$$4\,Y^2(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2) + 4\,Y(AA' + BB' + CC') + A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

so sieht man, dass der letzteren durch $Y = r_1$ genügt wird. Da aber $Y = r + r_1$, so muss r in diesem Falle gleich Null sein. Den anderen Werth von r erhält man, wenn man die Gleichung 22 (für $\omega = 0$) durch $Y - r_1$ dividirt und den Quotienten gleich Null setzt; denn da r_1 für diesen Fall eine Wurzel der Gl. 22 ist, so muss dieselbe durch $Y - r_1$ ohne Rest theilbar sein. In der That ist der Rest der Division gleich:

$$4\,r_1^{\,2}(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2) + 4\,r_1\,(AA' + BB' + CC') + A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

was wir oben gleich Null gefunden haben, während der Quotient ist:

$$4\,Y(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2) + 4\,[AA' + BB' + CC' + r_1\,(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2)];$$

setzt man diesen gleich Null, so erhält man:

$$Y = -\frac{AA' + BB' + CC' + r_1\,(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2)}{A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2}.$$

Da aber $Y = r + r_1$ ist, so folgt hieraus der zweite Werth von

$$r = -\frac{AA' + BB' + CC' + 2\,r_1\,(A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2)}{A'^2 + B'^2 + C'^2 - D^2} = -\frac{\nu + 2\,r_1\,\lambda}{\lambda}.$$

Auch dieser zweite Werth von r wird gleich Null, sobald die vier Kugeln durch die nämlichen zwei Punkte gehen oder einen und denselben Kreis zur gemeinschaftlichen Durchschnittsfläche haben. Für den ersten Fall nämlich haben x, y, z je 2 Werthe, für den zweiten unendlich viele, man hat deshalb für das Eintreten beider Fälle die Bedingungsgleichungen:

$$D = 0,\quad 2\,r_1\,A' + A = 0,\quad 2\,r_1\,B' + B = 0,\quad 2\,r_1\,C' + C = 0,$$

und für den zweiten ausserdem noch:

$$\frac{\alpha_2}{\gamma_2} = \frac{\alpha_3}{\gamma_3} = \frac{\alpha_4}{\gamma_4} \quad\text{und}\quad \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \frac{\beta_3}{\gamma_3} = \frac{\beta_4}{\gamma_4}.$$

Dadurch wird aber der oben gegebene zweite Werth von $r = 0$.

Denken wir uns nun einmal den Fall, die vierte Kugel schliesse den Durchschnittspunkt der drei ersten nicht ein und unsere Regeln ergäben das Vorhandensein zweier gleichartiger, etwa einschliessender Berührungen. Lassen wir jetzt die 4te Kugei dem Durchschnittspunkte der drei andern stetig sich nähern, so wird der Radius der einen Berührungskugel stetig abnehmen und zuletzt Null werden, sobald die vierte Kngel mit einem Punkte ihrer Oberfläche den Durchschnittspunkt der 3 andern erreicht hat, während die zweite Berührungskugel zwar auch stetig in Lage und Dimension sich ändert, aber immer in der nämlichen Weise wie vorher die 4 Kugeln berührt. Das Letztere wird auch noch der Fall bleiben, wenn die 4te Kugel über den Durchschnittspunkt der andern stetig hinausgeht und denselben einschliesst; dagegen wird jetzt der Radius der ersten Berührungskugel wachsen, aber in Bezug auf die Oberflächen der 4 Kugeln die entgegengesetzte Lage haben, wie vorher. Die erste Berührungskugel wird also jetzt, anstatt die vier Kugeln einzuschliessen oder von ihnen eingeschlossen zu werden, dieselben ausschliessen, und man wird zwei ungleichartige Berührungen haben, ohne dass die analytischen Bedingungen der Aufgabe sich geändert hätten. Dieses Verhalten wird so lange dauern, bis die stetig vorrückende 4te Kugel zum zweitenmale den Durchschnittspunkt der drei andern überschritten hat, weil die ungleichartig und zwar einschliessend berührende 2te Berührungskugel jetzt in eine gleichartig und zwar ausschliessend berührende sich umwandelt; somit ist jetzt wieder der normale Zustand hergestellt. Ebenso wird dieser normale Zustand herrschen, wenn die 3 ersten Kugeln sich in 2 Punkten schneiden und die vierte ihre beiden Durchschnittspunkte einschliesst, weil man in Bezug auf den zweiten Durchschnittspunkt die nämlichen Schlüsse machen kann, wie in Bezug auf den ersten und die Verhältnisse, die durch die Einschliessung des ersten Durchschnittspunktes eine Umkehrung erfahren hatten, durch die Einschliessung des zweiten eine Umkehrung dieser Umkehrung, d. h. eine Rückkehr in den normalen Zustand erleiden. Es kommt schliesslich noch darauf an, ob sich auch analytisch dieses abnorme Verhalten erklären lässt. Im Anfange dieser Abhandlung haben wir darauf aufmerksam gemacht, dass die Gleichungen 22 und 23 vier Werthe für r lieferten, von denen immer 2 positiv und 2 negativ seien. Im Allgemeinen, wurde weiter bemerkt, könne man nur die positiven Werthe brauchen, sei es, dass sie aus einer einzigen dieser Gleichungen oder der eine aus dieser, der andere aus jener Gleichung hervorgingen, und nur da, wo Lagenverhältnisse der Radien, die einen entgegengesetzten Sinn hätten, in Betracht kämen, sei es gerechtfertigt, auch einen negativen Werth als Lösung anzuerkennen. Dies ist nun, wie aus der vorhergehenden Auseinandersetzung klar geworden sein wird, hier wirklich der Fall. Schliesst nämlich die vierte Kugel den Durchschnittspunkt der drei übrigen nicht ein und finden zwei gleichartige einschliessende Berührungen statt, so gibt die Gleichung 23 zwei positive Werthe für r, die Gleichung 22 zwei negative von bezüglich derselben absoluten Grösse; wird aber der Durchschnittspunkt der 3 Kugeln von der

4ten eingeschlossen, so liefern beide Gleichungen einen positiven und einen negativen Werth für r von bezüglich derselben Grösse. Diesmal hat man nicht aus der einen Gleichung den einen positiven und aus der andern den andern positiven Werth für r zu entnehmen, sondern aus einer von beiden, gleichgültig welcher, sowohl den positiven als den negativen Werth; denn in der That hat der Radius der einen Berührungskugel jetzt im Vergleich zu dem früheren Zustande die entgegengesetzte Lage.

Endlich sei noch der Ausnahmefall $D = 0$ erwähnt, in welchem alle 4 Kugelmittelpunkte auf einer Ebene liegen. Dann hat $-V^2$ für alle 8 Paare die Form $\frac{S^2}{4f^2}$, ist also positiv; die Berührungen conjugirter Kugeln sind dann immer gleichartig, was mit dem Seite 19 der vorjährigen Abhandlung Gesagten übereinstimmt.